Cette application linéaire s'appelle la transformée de Fourier discrète (DFT).

3. Soit $x \in \mathbb{C}^N$. Etablir la formule d'inversion :

$$x_n = \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k \, e^{+2ikn\pi/N}, \text{ pour tout } 1 \leq n \leq N.$$

Ex-5 : On se donne les réels α, β, a, b, c et les matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \dots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \dots & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b & c & c & \dots & c \\ a & b & c & \dots & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & a & b & c \\ a & \dots & a & a & b \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que : $DetA = (\beta + (n-1)\alpha)(\beta - \alpha)^{n-1}$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de A.

3. Calculer le rayon spectrale ρ de A.

4. Démontrer que pour $a \neq c$: $detB = \dfrac{c(b-a)^n - a(b-c)^n}{c-a}$